P-46

基礎科学

確率論と代数学の融合を目指して 半群によるマルコフ連鎖の分析

SATテクノロジー・ショーケース2024

■ はじめに

現在の状態にのみ依存し、過去の状態に依存しない確率過程をマルコフ連鎖という。例として、カードシャッフルや盤上のチェスの駒の動きなどが挙げられる。マルコフ連鎖は物理や情報といった数学以外の分野でも用いられる。

マルコフ連鎖は、推移確率行列と呼ばれる行列と1対1対応する。

先行研究にて、Left Regular Band（LRB）と呼ばれる代数系によって表現できるマルコフ連鎖について、それと対応する推移確率行列の固有値と重複度を求める手法が示された。

LRBで表現可能なマルコフ連鎖を具体的に探し、そのマルコフ連鎖の推移確率行列の固有値と重複度を求めた。

重複度の値に、組み合わせ論的な数が生じることを確認した。

■ 研究内容

1. マルコフ連鎖

現在の状態にのみ依存し、過去の状態に依存しない確率過程を**マルコフ連鎖**という。マルコフ連鎖に対して**推移確率行列**と呼ばれる行列が1対1対応する。

図1のマルコフ連鎖の推移確率行列 P は、次のように表される。

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2/5 & 1/10 \end{pmatrix}$$

2. Left Regular Band （LRB）

結合則「$(x*y)*z = x*(y*z)$」が成り立つものを**半群**という。

半群の中で、「$x^2 = x$ 、$xyx = xy$」を満たすものを**Left Regular Band（LRB）**という。

3. 先行研究　（keneth S Brown）（2000）

Left Regular Band S を考える。S上の分布$\{w_x\}_{\{x \in S\}}$を与える。LRB S を用いたマルコフ連鎖を「確率w_xで$x \in S$を左からかける」という操作によって定義する。

このマルコフ連鎖の推移確率行列 P の 固有値λ_X 、重複度 m_X は次のように表される。

$$\lambda_X = \sum_{\mathrm{supp}\, y \le X} w_y \ , \quad m_X = \sum_{Y \ge X} \mu(X, Y)\, c_Y$$

■ 主結果

先行研究の結果を用いて以下のマルコフ連鎖の推移確率行列の固有値と重複度を求めた。

マルコフ連鎖	重複度 (m_X)	背景
Tsetlin library	$d_{n-\lvert X\rvert}$ モンモール数	$n! = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, d_k$
p 色版 Tsetlin library	$D_{n-\lvert X\rvert,p}$ p 色版モンモール数	$n!\,p^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, D_{k,p}$
Tsetlin library の q 類似	$F_n(\dim X)$ ？	$[n]_q! = \sum_{k=0}^{n} \left[{}_nC_k\right]_q F_n(k)$
リフルシャッフル riffle shuffle	$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 第一種スターリング数	$n! = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

図1

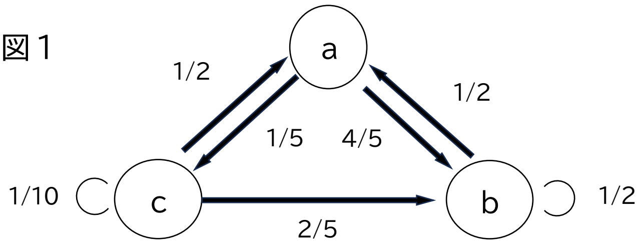
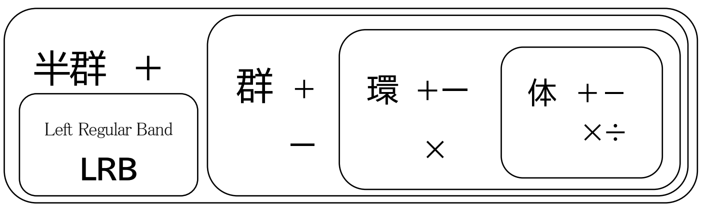


図2



但し自明群は除く

代表発表者　中川　由宇斗（なかがわ　ゆうと）
所　　属　東北大学大学院　理学研究科数学専攻
博士課程後期２年
所属学会　日本数学会
問合せ先　〒980-8578　仙台市青葉区荒巻字青葉６番３号
TEL：022-795-6401　FAX：022-795-6400
東北大学理学研究科数学専攻
Mail：yuto.nakagawa.r5@dc.tohoku.ac.jp

■キーワード：(1)数学
(2)確率論
(3)マルコフ連鎖
(4)Left Regular Band
(5)組み合わせ論